

# Merkblatt zur Differential- und Integralrechnung

Alexander (Axel) Straschil

11. Januar 2008

Diese lose Sammlung zu Themen der Differential- und Integralrechnung entsteht im Laufe meines Informatikstudiums an der TU-Wien zur Prüfungsvorbereitung der VO Mathematik für Informatiker 2. Es handelt sich zum überwiegenden Teil um eine Zusammenfassung der Sätze aus [DGKP07]. Fehlerhinweise bitte per Email<sup>1</sup>.

## Differential- und Integralrechnung in einer Variable

### Wichtige Differentiale und Integrale :

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	$c$	$c \cdot x$
1	$x$	$\frac{x^2}{2}$
$a \cdot x^{a-1}$	$x^a$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$e^x$	$e^x$	$e^x$
$a \cdot e^{a \cdot x}$	$e^{a \cdot x}$	$\frac{e^{a \cdot x}}{a}$
$a^x \cdot \ln a$	$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$x \cdot \ln x - x$
$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\log_a x$	$\frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a}$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$-\ln \cos x $
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\cot x$	$\ln \sin x $
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \cdot \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} x$	$x \cdot \operatorname{arccot} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$

### Rechenregeln für die Differentialrechnung

- Konstanter Faktor:  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- Summenregel:  $(f \pm g)' = f' \pm g'$

- Produktregel:  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$   
 $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$
- Quotientenregel:  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
- Kettenregel:  $(f(g))' = \frac{df(g)}{dg} \cdot g'(x)$   
 $(f(g(h(x))))' = f'(g) \cdot g'(h) \cdot h'(x)$
- Umkehrfunktion:  $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(x))}$

### Rechenregeln für die Integralrechnung

- Hauptsatz:  $\int_a^b f(x)dx = F|_a^b = F(b) - F(a)$
- Konstanter Faktor:  $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$   
 $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx = c \cdot (F|_a^b)$
- Summenregel:  
 $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- partielle Integration:  $\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = (f(x) \cdot g(x))|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$
- Substitution:  $\int_a^b f(g) \cdot g' dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g)dg$
- Grenzen:  $\int_a^b f dx + \int_b^c f dx = \int_a^c f dx$

**Der Differentialquotient und die Ableitung** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar im Punkt  $x_0$ , falls der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert. Dieser Grenzwert ist die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  und wird mit  $f'$  bzw.  $\frac{df}{dx}$  bezeichnet.

Ist  $f$  im ganzen Definitionsbereich differenzierbar, so heißt die Funktion  $f'(x)$  die Ableitung von  $f$ . Ist eine Funktion im Punkt  $x_0$  differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

<sup>1</sup>Alexander.Straschil@student.tuwien.ac.at

Die weiteren Ableitungen werden mit  $f''$ ,  $f'''$  bzw.  $f^{(n)}$  bzw.  $\frac{d^n f}{x^n}$  bezeichnet.

**Extrema (Maxima u. Minima)** Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt an der Stelle  $x_0$  ein relatives Maximum, wenn für alle  $x$  aus einer Umgebung  $U_\epsilon(x_0) \subseteq D$  gilt:  $f(x) \leq f(x_0)$ . Gilt dies für alle  $x$  aus  $D$  (nicht nur aus  $U_\epsilon$ ), so ist  $x_0$  ein absolutes Maximum. Gleiches gilt umgekehrt für Minima.

Ist  $x_0$  ein Extrema, so ist  $f'(x) = 0$ .

**Mittelwertsatz der Differentialrechnung** Ist  $f$  auf einem abgeschl. Intervall  $[a, b]$  stetig, und auf einem offenen Intervall  $(a, b)$  differenzierbar, dann gibt es einen Punkt  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

Der Satz sagt aus, dass es für jedes Intervall  $[a, b]$  einen Punkt innerhalb von  $[a, b]$  gibt, wo die Ableitung des Intervalles mit der des Punktes übereinstimmt, oder, geometrisch, dass es zu jeder Geraden, welche die Kurve in den Punkten  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$  schneidet eine parallel Tangente gibt, welche die Kurve im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  berührt.

Gelte weiter für eine Funktion  $g$  gleiches wie für  $f$  und sei  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ .

**Satz von Rolle** Sei  $f$  stetig auf  $[a, b]$ , differenzierbar auf  $(a, b)$  und  $f(a) = f(b)$ . Dann gibt es ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$ .

**Das Innere** Für das abgeschlossene Intervall  $I = [a, b]$  ist offene Intervall  $\overset{\circ}{I} = (a, b)$  das Innere von  $I$ .

Für zwei auf dem Intervall  $I$  stetige und in dessen inneren  $\overset{\circ}{I}$  differenzierbare Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $f'(x) = g'(x)$  für alle  $x \in I$  ist die Differenz  $f(x) - g(x)$  auf  $I$  konstant.

**Taylorreihe**  $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$  ist die Taylorreihe von  $f(x)$  im Entwicklungspunkt  $x_0$ .

Das Taylorpolynom  $n$ -ter Ordnung mit dem Restglied (dem Fehler)  $R_n$  ist dann

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n.$$

Für das Restglied  $R_n$  gilt:  $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$  mit  $\xi \in \overset{\circ}{I}$  von  $I = [x_0, x]$  (bzw.  $I = [x, x_0]$ ).

**Kurvendiskussion** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf  $D$  differenzierbare Funktion.

Dann ist  $f$ , wenn für alle  $x \in D$  gilt:

- $f'(x) \geq x$  monoton wachsend
- $f'(x) > x$  streng monoton wachsend
- $f'(x) \leq x$  monoton fallend
- $f'(x) < x$  streng monoton fallend

Ist  $f$  zweimal stetig differenzierbar, und  $f'(x_0) = 0$ , dann ist  $x_0$  ein relatives Maximum falls  $f''(x_0) < 0$ , und ein relatives Minimum falls  $f''(x_0) > 0$ .

Satz zu rel. Extrema: Sei  $f$   $n$ -mal stetig differenzierbar, und seien alle  $n - 1$  Ableitungen  $f^{(k)}(x_0) = 0$  ( $k = 1 \dots n - 1$ ), und  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , dann gilt: Ist  $n$  gerade, dann ist  $x_0$  ein rel. Max. wenn  $f^{(n)} < 0$ , sonst ein rel. Min.. Ist  $n$  ungerade, dann existiert eine Umgebung  $U_\epsilon$  von  $x_0$  in der  $f$  streng monoton ist, und zwar fallend wenn  $f^{(n)} < 0$ , sonst steigend.

Eine Stelle  $x_0$  heißt Wendepunkt, wenn  $f'$  in  $x_0$  ein rel. Extremum besitzt.

Wenn  $f$  dreimal differenzierbar ist, und  $f''(x_0) = 0$  und  $f'''(x_0) \neq 0$ , dann ist  $x_0$  ein Wendepunkt.

**Konvex / Konkav** Eine Funktion  $f$  heisst auf einem Intervall  $I$ , wenn für alle  $x, y \in I$  und alle  $0 < \lambda < 1$  gilt, mit  $L(x) = f(x + \lambda(y - x))$  und  $R(x) = f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$ :

- $L \leq R$  konvex
- $L < R$  streng konvex
- $L \geq R$  konkav
- $L > R$  streng konkav

Ist  $f$  auf  $I$  stetig und in  $\overset{\circ}{I}$  differenzierbar, dann ist  $f$  auf  $I$  (streng) konvex (bzw. konkav), wenn  $f'$  auf  $\overset{\circ}{I}$  (streng) monoton steigend (bzw. fallend) ist, und auch, wenn zweimal differenzierbar genau dann konvex (bzw. konkav) wenn  $f''(x) \geq 0$  bzw.  $f''(x) \leq 0$  (und streng konvex/konkav bei  $>$  bzw.  $<$ ).

**Regel von de'Hospital** Seien  $f$  und  $g$  auf  $I = [a, b]$  stetige und in  $\overset{\circ}{I}$  differenzierbare Funktionen, sei  $x_0 \in I$  und  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ , und existiere der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Dann gilt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Unbestimmtes Integral** Sei  $I$  ein Intervall, und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Jede Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$  heißt Stammfunktion oder unbestimmtes Integral von  $f$ :  $F(x) = \int f(x) dx$ .  $f$  ist der Integrand, und  $x$  die Integrationsvariable.

Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann sind auch alle Funktionen  $F + c$  Stammfunktionen von  $f$ .

**Substitution d. unbest. Int.** Sei  $F$  Stammfunktion von  $f$ , dann gilt:  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x))$ . Wenn  $g^{-1}$  existiert, dann folgt aus  $u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow \frac{du}{g'(x)} = dx$  durch einsetzen  $F(g(x)) = \int f(u) \cdot g'(x) \frac{du}{g'(x)} = \int f(u) du$ .

**Integration mit Partialbruchzerlegung** Die rationale Funktion  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  kann man durch Polynomdivision in die Form  $f(x) = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$  umformen, wobei  $a(x)$  das Ergebnis der Polynomdivision mit dem Rest  $r(x)$  ist. *TODO ... schwer zu beschreiben!*

**Das bestimmte Riemannsche Integral** Sei  $Z : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Zerlegung des Intervalls  $I = [a, b]$  mit den Teilintervallen  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$   $k = 1 \dots n$ , und der Feinheit  $\mathfrak{F}(Z) = \max(|I_k|)$  (also dem längsten Intervall), sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge von  $Z$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{F}(Z_n) = 0$ . Wenn alle beliebigen Folgen  $Z_n$  gegen den selben Grenzwert konvergieren, dann nennt man diesen Grenzwert das bestimmte Integral von  $f$  auf  $[a, b]$ , und die Funktion  $f$  ist dann integrierbar auf den Integrationsgrenzen  $[a, b]$  mit der Integrationsvariable  $x$ .

Das bestimmte Integral von  $f(x)$  mit der Stammfunktion  $F(x)$  und den Integrationsgrenzen  $a, b$  entspricht dann:

$$\begin{aligned} a < b : & \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \\ a > b : & \int_b^a f(x) dx = F(x)|_b^a = F(a) - F(b) \\ a = b : & \int_a^a f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

**Riemann'sches Integrierbarkeitskriterium und Folgerungen** Eine auf dem Intervall  $[a, b]$  beschränkte Funktion  $f$  ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  gibt, so dass die zugehörigen Obersummen  $O_Z(f)$  und Untersummen  $U_Z(f)$  die Ungleichung  $O_Z(f) - U_Z(f) < \epsilon$  erfüllen.

Jede auf  $[a, b]$  definierte monotone Funktion ist integrierbar.

Jede auf  $[a, b]$  stückweise stetige Funktion ist integrierbar (stückweise stetig im Intervall  $[a, b]$  heisst, dass die Funktion im Intervall beschränkt ist, nur an endlich vielen Stellen unstetig ist, und an beiden Seiten aller Unstetigkeitsstellen die einseitigen Grenzwerte existieren).

Für jede integrierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist auch  $|f|$  integrierbar.

**Mittelwertsatz der Integralrechnung** Ist  $f$  stetig auf dem Intervall  $[a, b]$ , dann gibt es ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$ .

Der Satz sagt aus, dass die Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse durch ein (flächengleiches) Rechteck dargestellt werden kann, dessen Höhe ein Funktionswert aus dem Intervall  $[a, b]$  ist.

**Hauptsatz der Integralrechnung** Für eine auf dem Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion  $f$  mit der Stammfunktion  $F(x) = \int_a^b f(t) dt$  erfüllt jede Stammfunktion  $F$  von  $f$ :  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ .

**Substitution bestimmter Integrale** Sei  $f$  stetig auf  $[a, b]$ ,  $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar und  $a = g(c)$ ,  $b = g(d)$ , dann gilt:  $\int_a^b f(u) du = \int_c^d f(g(x)) \cdot g'(x) dx$ .

**Uneigentliche Integrale** Sei  $f$  eine Funktion auf dem halboffenen Intervall  $I = [a, b)$  mit  $\lim_{x \rightarrow b} = \infty$  und auf jedem Teilintervall  $I' = [a, c) \subset [a, b)$  integrierbar.

Dann nennt man Integrale der Form  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$  uneigentliches Integral erster Art. Diese Integral kann - je nach existenz des Grenzwertes - konvergent oder divergent sein.

Sei  $a \in \mathbb{R}$  fest und  $f$  auf  $[a, b) \subset [a, \infty)$  integrierbar, dann heisst  $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$  uneigentliches Integral zweiter Art, welches - je nach Grenzwert - konvergent oder divergent sein kann.

Für auf  $[0, \infty)$  stückweise stetige Funktionen  $f, g$  mit  $\forall x \geq 0 : |f(x)| \leq g(x)$  gilt dann: Ist  $\int_0^\infty g(x) dx$  konvergent, dann auch  $\int_0^\infty f(x) dx$

**Integrialkriterium** Für eine nichtnegative monoton fallende Funktion  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty f(x) dx$  genau dann konvergent, wenn die Reihe  $\sum_{n=1}^\infty f(n)$  konvergent ist.

## Differential- und Integralrechnung mehrerer Variablen

**Definitheit einer symmetrischen quadratischen Matrix** Sei  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$A$  definit wenn  $\det A > 0$ , und zwar positiv definit wenn  $a > 0$ , und negativ definit wenn  $a < 0$ . Ist  $\det A < 0$ , so ist  $A$  indefinit. Für andere Fälle hat dieser Satz keine Aussage!

**Partielle Ableitungen** Die Ableitungen von  $f$  in Richtung  $x$  bzw.  $y$  heissen partielle Ableitungen nach  $x$  bzw.  $y$ :  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  und  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ . Die Ableitungen zweiter Ordnung sind:  $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  und  $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ . Für Vektorfelder ( $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ) müssen alle Funktionen der Zielkoordinaten partiell differenzierbar sein:  $\frac{\partial f}{\partial x_k} = (\frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k})$  für ein  $x_k$  aus  $\vec{x}$ .

**Hesse-Matrix** Ist die Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, im Falle von zwei Variablen ist  $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ .

**Gradient** Für eine total differenzierbare Funktion  $f$  heisst der Vektor aller partieller Ableitungen Gradient:  $\text{grad}f = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})$  bzw.  $\text{grad}f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ .

**Jakobi- oder Funktional-Matrix** Die Jakobi-Matrix  $J_f$  beinhaltet die partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen einer vektorwertigen Funktion. Für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  ist  $J_f = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ .

**Funktionaldeterminante** Die Funktionaldeterminante ist die Determinante der Jakobimatrix einer vektorwertigen Funktion auf  $\mathbb{R}^n$  mit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ .  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$

**Produktregel** Seien  $f, g$  zwei total differenzierbare skalarwertige ( $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) Funktionen, und  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ . Dann gilt  $\text{grad}h(x_0) = f(x_0) \cdot \text{grad}g(x_0) + g(x_0) \cdot \text{grad}f(x_0)$ .

**Hauptsatz über implizite Funktionen** Sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion,  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Dann gilt  $y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$  und  $x'(y) = -\frac{F_y(y, x(y))}{F_x(y, x(y))}$ .

**Richtungsableitung** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine an der Stelle  $x = (x_1, \dots, x_n)$  total differenzierbare Funktion und  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  ein normierter Vektor (also  $\|\vec{v}\| = 1$ ). Dann gilt für die Ableitung in Richtung  $\vec{v}$ :  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x) = f_{x_1}(x)v_1 + \dots + f_{x_n}(x)v_n = \text{grad}f(x) \cdot \vec{v}$ . Die Richtung mit dem größten Anstieg ist in Richtung  $\text{grad}f(x)$ .

**Kettenregel** Sei  $f$  eine skalare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g$  eine vektorwertige Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ . Sei  $F(x) = f(g(x))$ , dann ist  $F' = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(g_1(x), \dots, g_n(x)) \cdot g'_i(x)$ .

**Quadratische Taylorapproximation** Die Taylorableitung zweiter Ordnung für zwei Variablen mit  $h = x - x_0$ ,  $k = y - y_0$ , der Hesse-Matrix  $H_f$  und dem Restglied  $R(x)$  ist  $f(x_0, y_0) + (h, k) \cdot \text{grad}f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(h, k) \cdot H_f \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + R(x)$ , oder allgemein für  $n$  Variablen mit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $h = (h_1, \dots, h_n)$ :  $f(x+h) = f(x) + h \cdot \text{grad}f(x) + \frac{1}{2}h \cdot H_f \cdot h^T + R(x)$ .

**Lokale Extrema** Stationäre Punkte sind Punkte, für die  $\text{grad}f(x) = 0$  gilt. Sei  $P$  ein stationärer Punkt, und  $H_f$  die Hesse-Matrix von  $f$ .  $P$  ist ein relatives Maximum, wenn  $H_f(P)$  negativ definit ist, ein relatives Minimum, wenn  $H_f(P)$  positiv definit ist. Ist  $H_f(P)$  indefinit, so liegt keine Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

**Extrema mit Nebenbedingungen / Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren** Seien  $f, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1 \dots m$ , stetig differenzierbare Funktionen,  $x_0$  ein lokales Extremum von  $f$  unter den Nebenbedingungen  $g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0$ , und die Gradienten von allen  $g_i(x)$  linear unabhängig. Dann existieren die Werte  $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ , sodass die Funktion  $F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) := f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$  die Gleichung  $\text{grad}F(x_0, \lambda_0, \dots, \lambda_m) = 0$  erfüllt.

Im Speziellen existiert für eine zweistellige Funktion  $f$  mit der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  ein  $\lambda_0$ , sodass die Funktion  $F(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$  die Gleichung  $\text{grad}f(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$  erfüllt.

**Bereichsintegrale** Sei  $B$  der Bereich  $[a, b] \times [c, d]$ . Dann ist  $\int \int_B f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ .

**Satz von Fubini** Seien  $\varphi_1, \varphi_2$  zwei stetige Funktionen, und  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), c \leq y \leq d\}$ , dann ist  $\int \int_B f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx dy$ .

Existieren  $\varphi'_1, \varphi'_2$ , sodass  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi'_1(x) \leq y \leq \varphi'_2(x), a \leq x \leq b\}$ , so ist  $\int \int_B f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\varphi'_1(x)}^{\varphi'_2(x)} f(x, y) dy dx$ .

**Kurven** Eine Kurve ist eine stetige Abbildung  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Die Variablen einer Kurve werden als Parameter der Kurve bezeichnet.

Kurven können unterteilt, und durch einen Polygonenzug approximiert werden. Die Unterteilung einer Kurve  $c$  ist eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  mit  $a = z_0 < z_1 < \dots < z_r = b$ , die Abweichung der Approximation  $\sum_{i=1}^r \|c(z_i) - c(z_{i-1})\|$  wird als Feinheit  $\mathfrak{F}$  bezeichnet.

Eine Kurve ist von endlicher Länge (**rektifizierbar**), wenn die Approximation durch die Polygonenzüge bei gegen 0 gehender Feinheit der Zerlegung gegen einen Grenzwert konvergiert, und besitzt dann die **Bogenlänge**  $L = \lim_{\mathfrak{F}(Z) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|c(z_i) - c(z_{i-1})\|$ .

**Bogenlänge stetig diff. Kurven** Die Bogenlänge einer stetig differenzierbaren Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$  entspricht dem Integral  $L = \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{c_1'(t)^2 + \dots + c_n'(t)^2} dt$ .

**Kurvenintegral einer skalaren Funktion** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, und  $g(t) = f(c(t))$  stückweise stetig. Das Kurvenintegral der skalaren Funktion  $f$  längs  $c$  ist dann das Integral  $\int_a^b f(c(t)) \cdot \|c'(t)\| dt$ .

**Krümmung einer Kurve** Für eine stetig differenzierbare ebene Kurve  $c(t)$  mit  $l(t) = s$  als Bogenlänge zum Parameter  $t$  ist die Krümmung der Kurve im Punkt  $c(t)$  definiert als  $k(t) = \frac{d}{ds} \varphi(l^{-1}(s))$ .

Wenn  $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$  zweimal stetig differenzierbar ist, dann ist  $k(t) = \frac{c_1'(t)c_2''(t) - c_1''(t)c_2'(t)}{(c_1'(t)^2 + c_2'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

Falls die Kurve  $c(t) = (t, f(t))$  ist (also der Graph einer Funktion), so gilt  $k(t) = \frac{f''(t)}{(1+f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

**Kurvenintegral eines Vektorfeldes** Für eine Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und einem Vektorfeld  $f$  :

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist das Kurvenintegral des Vektorfeldes  $f$  längs der Kurve  $c$  definiert als das Integral  $\int_c f(x) dx = \int_c (f_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n) dx_n) = \int_a^b f(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_a^b \left( \sum_{k=1}^n f_k(c(t)) c'_k(t) \right) dt$

### Eigenschaften des Kurvenintegrals

- Der Betrag des Kurvenintegrals hängt nur von der Kurve selbst ab, nicht von der Parametrisierung.
- Durchläuft man die Kurve in entgegengesetzter Richtung, so wechselt der Wert das Vorzeichen.
- Linearität bezgl. des Vektorfeldes: Seien  $f_1, f_2$  zwei Vektorfelder und  $c$  eine Kurve (alle in  $\mathbb{R}^n$ ), so gilt:  $\int_c (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_c f_1(x) dx + \int_c f_2(x) dx$ .
- Additivität bezgl. des Weges: Sei  $f$  ein Vektorfeld und  $c_1, c_2$  Kurven mit  $c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $c_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c_1(b) = c_2(c)$ , und sei  $c$  die durch  $c_1, c_2$  zusammengesetzte Kurve, so gilt:  $\int_{c_1} f(x) dx + \int_{c_2} f(x) dx = \int_c f(x) dx$ .

**Offen, Abgeschlossen, kompakt, Zusammenhang, Gebiet, Gradientenfeld, Potential** Eine Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt offen, wenn es zu jedem  $x \in D$  folgt eine Umgebung  $U_\epsilon(x)$  mit  $U_\epsilon(x) \subseteq D$  gibt.

Die Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  heisst abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge, deren Glieder in  $D$  liegen, selbst in  $D$  liegt.

Eine in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossene und beschränkte Menge heisst kompakt.

Die Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ist zusammenhängend, wenn zu je zwei Punkten  $x_1, x_2 \in D$  eine Kurve  $c : [a, b] \rightarrow D$  mit  $c(a) = x_1$  und  $c(b) = x_2$  existiert.

Eine offene und zusammenhängende Menge  $D$  heisst Gebiet.

Ein Gebiet  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve in  $D$  stetig auf einen ihrer Punkte zusammenziehen lässt.

Für ein Gebiet  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  und ein stetiges Vektorfeld  $f$  nennt man  $f$  ein Gradientenfeld, wenn es ein Skalarfeld  $F$  mit  $\text{grad} F = f$  gibt. Dann heißt  $F$  Stammfunktion und  $F$ -Potential von  $f$ .

Wenn  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  einfach zusammenhängend und  $f$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf  $D$  ist, dann ist  $f$  genau dann ein Gradientenfeld, wenn  $f$  die Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

**Integrabilitätsbedingungen** Ein stetig differenzierbares Gradientenfeld  $f$  erfüllt die Integrabilitätsbedingungen  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  für alle  $i, j$  mit  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Wegunabhängigkeit** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $f$  ein Vektorfeld. Das Kurvenintegral von  $f$  längs einer stetig differenzierbaren Kurve  $c : [a, b] \rightarrow D$  ist genau dann wegunabhängig, wenn das Vektorfeld  $f$  ein Gradientenfeld ist. Wegunabhängig heisst dann, dass das Kurvenintegral nur von Anfangs- und Endpunkt bestimmt ist.

Dann ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , und es gilt:  $\int_c f(x)dx = F(c(b)) - F(c(a))$ .

Weiters folgt, dass in einem Gradientenfeld die Kurvenintegrale über geschlossenen Kurven gleich 0 sind:  $\oint_c f(x)dx = 0$ .

## Differenzgleichungen

Eine (autonome) Differenzgleichung erster Ordnung hat die Form  $x_{n+1} = f(x_n)$ , eine zweiter Ordnung  $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$ .

Allgemein  $k$ -ter Ordnung  $F(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) = 0$  mit  $n \in \mathbb{N}_0^+$ . Die dazu explizite Form ist  $x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1})$ . Sie heisst autonom, wenn sie nicht von  $n$  abhängt, und hat dann die Form  $x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1})$ .

Die Differenzgleichung ist linear, wenn  $f$  in  $x_n$  linear ist, ansonsten ist sie nicht linear.

Eine partikuläre Lösung ist eine Folge, bei der jeweils  $k$  aufeinander folgende Glieder die Gleichung  $F(\dots) = 0$  erfüllen. Eine allgemeine Lösung ist ein Term zur Bildung der partikulären Lösungen. Z.B. ist für  $x_{n+1} = 2x_n + 1$  die allgemeine Lösung  $x_n = 2^n C - 1$  mit  $C \in \mathbb{R}$ , und eine partikuläre Lösung mit  $x_0 = 1$  und  $C = 1$  wäre  $x_n = 2^n - 1$ .

Die Lösung einer Differenzgleichung durch eine explizite Formel (für  $x_n$ ) nennt man die quantitative, das Finden von Gleichgewichtslagen und bestimmung der Stabilität die qualitative Theorie.

### Lineare Differenzgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Für  $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  gilt:

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1} & \text{für } a \neq 1 \\ x_0 + bn & \text{für } a = 1 \end{cases}$$

**Allgemeine homogene Differenzgleichung erster Ordnung** Hat die Form  $x_{n+1} = a_n x_n$  mit ( $n \in \mathbb{N}_0^+$ ) und besitzt die allgemeine Lösung  $x_n = C \cdot \prod_{i=0}^{n-1} a_i$ .

**Allgemeine inhomogene Differenzgleichung erster Ordnung** Hat die Form  $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$  mit ( $n \in \mathbb{N}_0^+$ ),  $b_n$  nennt man die Störfunktion. Sie besitzt die Lösung  $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$ , wobei  $x_n^{(h)}$  die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung  $x_{n+1} = a_n x_n$  ist, und  $x_n^{(p)}$  eine beliebige partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

### Methoden zum Bestimmen von $x_n^{(p)}$

• **Variation der Konstanten** Es wird die Konstante  $C$  von  $x_n^{(h)}$  variiert:  $x_n^{(p)} = C_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i$ . In  $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$  eingesetzt ergibt dies  $C_{n+1} \prod_{i=0}^{(n+1)-1} a_i = a_n \cdot C_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i + b_n$ . Kann hieraus  $C_n = T(n)$  gefolgert werden (mit frei wählbaren  $C_0$ ), so erhält man  $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = C \cdot \prod_{i=0}^{n-1} a_i + T(n) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} a_i = (C + T(n)) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} a_i$  mit  $C \in \mathbb{R}$ .

### • Methode des unbestimmten Ansatzes

!!!TODO!!!

### • Methode der erzeugenden Funktionen

!!!TODO!!!

**Fix- bzw. Gleichgewichtspunkt** Ein Punkt  $x^*$  einer Differenzgleichung  $x_{n+1} = f(x_n)$  mit  $f(x^*) = x^*$  heisst Fix- bzw. Gleichgewichtspunkt der Differenzgleichung. Graphisch ist dies der Schnittpunkt der Kurve  $y = f(x)$  mit der Geraden  $y = x$ .

Der Grenzwert einer konvergenten Lösungsfolge ist immer ein Gleichgewichtspunkt, zu jedem Gleichgewichtspunkt existiert die konstante Lösungsfolge  $x_n = x^*$ .

**Stabilität von Gleichgewichtslagen** Sei  $x^*$  ein Gleichgewichtspunkt der Differenzgleichung  $x_{n+1} = f(x_n)$ .  $x^*$  heisst stabil, wenn  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \forall$  Lösungsfolge  $(x_n)$  mit  $|x_0 - x^*| < \delta(\epsilon) \forall n : |x_n - x^*| < \epsilon$ , andernfalls instabil.

Ist  $x^*$  stabil, und gilt zusätzlich  $\exists \delta > 0 \forall (x_n)$  mit  $|x_0 - x^*| < \delta : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ , dann heißt  $x^*$  asymptotisch stabil.

Weiters ist  $x^*$  asymptotisch stabil, wenn  $|f'(x^*)| \stackrel{[Neu82]}{<} 1$ , und instabil, wenn  $|f'(x^*)| > 1$ .

Stabil bedeutet, dass eine Lösungsfolge innerhalb einer beliebigen Umgebung von  $x^*$  bleibt, wenn sie nahe genug an  $x^*$  beginnt, asymptotisch stabil, dass die Lösungsfolge gegen  $x^*$  konvergiert. [SM95]

**Lineare Differenzgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = s_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) mit konstanten Koeffizienten  $a, b$ . Ist die Störfunktion  $s_n = 0$  nennt man diese homogen, ansonsten inhomogen.

Die Lösungsgesamtheit setzt sich aus einer allgemeinen Lösung der homogenen Teils (also ohne Störfunktion), und einer beliebigen partikulärer Lösung des inhomogenen Teils (mit Störfunktion) zusammen:  $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$ .

**Die allgemeine Lösung  $x_n^{(h)}$  einer lin. Diff.gleichung**

**zweiter Ordnung** Sind  $x_n^{(1)}$  und  $x_n^{(2)}$  Lösungen der homogenen Gleichung  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ , so ist auch  $x_n = C_1 x_n^{(1)} + C_2 x_n^{(2)}$  mit  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  Lösung dieser Gleichung.

Gilt  $\begin{vmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$ , dann ist  $x_n$  die allgemeine

Lösung der homogenen Gleichung.

Sei  $x_n^{(h)} = \lambda^n$ , so folgt die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  mit der charakteristischen Wurzeln  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Abhängig von der Diskriminante  $a^2 - 4b$  der charakteristische Gleichung gibt es dann die drei Lösungsfälle (mit  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ):  $x_n^{(h)} =$

$$\begin{cases} C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n & , \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ (C_1 + C_2 n) \lambda_1^n & , \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ r^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi) & , \begin{matrix} \lambda_{1,2} = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \\ \text{konjugiert komplex} \end{matrix} \end{cases}$$

## Literatur

[DGKP07] M. Drmota, B. Gittenberger, G. Karigl, and A. Panholzer. *Mathematik für Informatiker*. Helder mann Verlag, Lemgo, 2007.

[KL05] Guenther Karigl and Stefan Lenk. *Mathematik 1 fuer informatiker*. Institut fuer Diskrete Mathematik und

Geometrie TU Wien, 2005. Skriptum zur Vorlesung an der TU Wien.

Hrsg. Helmut Neunzert. *Analysis 2*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

Horst Stöcker and Robert Münzel. *Mathematische Formeln für die technische Ausbildung und Praxis*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1995.