Lösungen zu Mathematik für Informatiker I Übungen Sommersemster 2007

Alexander (Axel) Straschil

3. April 2007

Diese Lösungen zu der Übung Mathematik für Informatiker I, Sommersemester 2007, entsteht gerade im laufe meines Informatikstudiums an der Technischen Universität Wien.

Fehlerhinweise bitte per Email an axel@straschil.com.

1 Sei a die Aussage „*Es gibt eine größte natürliche Zahl*" und b die Aussage „0 *ist die größte natürliche Zahl*". Man entscheide, ob die Aussagen $a \to b$ bzw. $b \to a$ wahr oder falsch sind.

Aussage a ist eine falsche Aussage. Beweis: Laut Definition besitzt jede natürliche Zahl n einen Nachfolger n', und es gilt $n < n'$. Angenommen es gäbe eine größte natürliche Zahl g, so gäbe es einen Nachfolger g' mit $g < g'$, was im Wiederspruch zur Annahme steht, dass g die grösste natürliche Zahl ist.

Aussage b ist eine falsche Aussage. Beweis: Die natürliche Zahl 0 besitzt den Nachfolger 1 mit $0 < 1$.

Da man aus eine falschen Prämisse beliebiges folgern kann sind die Aussagen $a \to b$ bzw. $b \to a$ wahre Aussagen.

2-7 Entscheiden Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob die folgenden Äuquivalenzen richtig sind.

2 $a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c$

Ist offensichtlich richtig, da die Disjunktion assoziativ ist.

a	b	c	$a \vee (b \vee c)$	$\Leftrightarrow$	$(a \vee b) \vee c$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w
w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	w	w
f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w
f	f	f	f	w	f

3 $a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$

a	b	$a \vee (a \wedge b)$	$\Leftrightarrow$	a
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	w	f
f	f	f	w	f

4 $a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

a	b	c	$a \wedge (b \vee c)$	$\Leftrightarrow$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w
w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f
f	w	f	f	w	f
f	f	w	f	w	f
f	f	f	f	w	f

6 $a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow \neg(b \rightarrow a)$

a	b	$a \leftrightarrow b$	$\Leftrightarrow$	$(a \rightarrow b)$	$\rightarrow$	$\neg(b \rightarrow a)$
w	w	w	f	w	f	f
w	f	f	f	f	w	f
f	w	f	f	w	w	w
f	f	w	f	w	f	f

Kontrolle: $a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow \neg(b \rightarrow a) = a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (\neg a \vee b) \rightarrow \neg(\neg b \vee a) = a \leftrightarrow b \Leftrightarrow \neg(\neg a \vee b) \vee \neg(\neg b \vee a) = (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)$. Ist sicher f.A.

25 Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.

Beweis durch Widerspruch: Sei $\sqrt{3}$ eine rationale Zahl, also $\sqrt{3} \in \{\frac{r}{s}|r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0, ggt(r, s) = 1\}$. D.h. $\exists r, s$ mit $\sqrt{3} = \frac{r}{s}$ und $ggt(r, s) = 1$. $\sqrt{3} = \frac{r}{s}$, $3 = \frac{r^2}{s^2}$, $r^2 = 3s^2$, also ist 3 Teiler von r^2, also ist 3 Teiler von r. Also existiert ein r' mit $r = 3r'$. $(3r')^2 = 3s^2$, $9r'^2 = 3s^2$, $3r'^2 = s^2$, also ist 3 Teiler von s^2, also ist 3 Teiler von s. Da 3 Teiler von r und s gilt $ggt(r, s) \neq 1$, was im Widerspruch zur Annahme steht, also ist $\sqrt{3}$ nicht rationale sondern irrational.

26 Zeigen Sie, dass $\sqrt{5}$ irrational ist.

Beweis durch Widerspruch: Sei $\sqrt{5}$ eine rationale Zahl, also $\sqrt{5} \in \{\frac{r}{s}|r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0, ggt(r, s) = 1\}$. D.h. $\exists r, s$ mit $\sqrt{5} = \frac{r}{s}$ und $ggt(r, s) = 1$. $\sqrt{5} = \frac{r}{s}$, $5 = \frac{r^2}{s^2}$, $r^2 = 5s^2$, also ist 5 Teiler von r^2, also ist 5 Teiler von r. Also existiert ein r' mit $r = 5r'$. $(5r')^2 = 5s^2$, $25r'^2 = 5s^2$, $5r'^2 = s^2$, also ist 5 Teiler von s^2, also ist 5 Teiler von s. Da 5 Teiler von r und s gilt $ggt(r, s) \neq 1$, was im Widerspruch zur Annahme steht, also ist $\sqrt{5}$ nicht sondern irrational.

27 Zeigen Sie, dass $\sqrt{6}$ irrational ist.

Beweis durch Widerspruch: Sei $\sqrt{6}$ eine rationale Zahl, also $\sqrt{6} \in \{\frac{r}{s}|r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0, ggt(r, s) = 1\}$. D.h. $\exists r, s$ mit $\sqrt{6} = \frac{r}{s}$ und $ggt(r, s) = 1$. $\sqrt{6} = \frac{r}{s}$, $6 = \frac{r^2}{s^2}$, $r^2 = 6s^2$, also ist 6 Teiler von r^2, also ist 6 Teiler von r. Also existiert ein r' mit $r = 6r'$. $(6r')^2 = 6s^2$, $36r'^2 = 6s^2$, $6r'^2 = s^2$, also ist 6 Teiler von s^2, also ist 6 Teiler von s (wegen $6 = 2 \cdot 3$ und $2, 3$ sind prim). Da 6 Teiler von r und s gilt $ggt(r, s) \neq 1$, was im Widerspruch zur Annahme steht, also ist $\sqrt{6}$ nicht rational sondern irrational.

29 Man Überprüfe die Gleichung $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für die ersten 5 natürlichen Zahlen und beweise sodann deren Gültigleit für alle natürlichen Zahlen durch vollständige Induktion.

Für die ersten 5 natürlichen Zahlen stimmt es: $\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0$, $\frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} = 0$; $\sum_{i=0}^{1} i^2 = 1$, $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$; $\sum_{i=0}^{2} i^2 = 5$, $\frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6} = 5$; $\sum_{i=0}^{3} i^2 = 14$, $\frac{3(3+1)(2\cdot 3+1)}{6} = 14$; $\sum_{i=0}^{4} i^2 = 30$, $\frac{4(4+1)(2\cdot 4+1)}{6} = 30$.

Allgemeiner Beweis durch Induktion:

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \forall n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbehauptung: $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Induktionsanfang ($n = 0$): $\sum_{i=0}^{0} i^2 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} = 0$.

Induktionsschluss: $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+2(2n+3))}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+3)+2(2n+3))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

30 Man zeige mittels vollständiger Induktion, daß für die rekursiv definierte Folge $x_1 = 1$ und $x_{k+1} = x_k + 8k$ für $k \geq 1$ allgemein gilt: $x_n = (2n-1)^2$, für alle $n \geq 1$.

Induktionsvoraussetzung: $x_n = (2n-1)^2$, für $n \geq 1$.
Induktionsbehauptung: $x_{n+1} = (2(n+1)-1)^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1$, für $n \geq 1$.
Induktionsanfang ($n = 1$): $x_1 = (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1$.
Induktionsschluss: $x_{n+1} = x_n + 8n = (2n-1)^2 + 8n = 4n^2 - 4n + 1 + 8n = 4n^2 + 4n + 1$.

32 Man bestätige die Richtigkeit der folgenden Behauptungen:

a Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ stets durch 3 teilbar - mit direktem Beweis.

$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n+1)(n-1) = (n-1)n(n+1)$. Dies entspricht also dem Produkt aus der Zahl mit dem Wert $(n-1)$ und ihren beiden Nachfolgern. Offensichtlich ist eine der drei Zahlen durch 3 teilbar, und das Produkt einer durch 3 teilbaren Zahl ist auch immer durch 3 Teilbar.

d Die Aussage (a) - mittels eines Beweises durch vollständige Induktion.

Induktionsvoraussetzung: $n^3 - n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist durch 3 teilbar.
Induktionsbehauptung: $(n+1)^3 - (n+1)$ ist durch 3 teilbar.
Induktionsanfang ($n = 0$): $0^3 - 0 = 0$ ist durch 3 teilbar.
Induktionsschluss: $(n+1)^3 - (n+1) = (n+1)\left((n+1)^2 - 1\right) = (n+1)(n^2+2n+1-1) = (n+1)(n^2+2n) = (n+1)n(n+2) = n(n+1)(n+2)$. Dies entspricht wieder dem Produkt einer Zahl mit zwei Nachfolger (siehe (a)), ist also durch 3 teilbar.

33 Man beweise mittels vollständiger Induktion: $\sum_{j=2}^{n} j(j-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ für $n \geq 2$.

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{j=2}^{n} j(j-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ für $n \geq 2$.

Induktionsbehauptung: $\sum_{j=2}^{n+1} j(j-1) = \frac{((n+1)-1)(n+1)((n+1)+1)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Induktionsanfang ($n = 2$): $\sum_{j=2}^{2} j(j-1) = 2(2-1) = 2 = \frac{6}{3} = \frac{(2-1)2(2+1)}{3}$.

Induktionsschluss: $\sum_{j=2}^{n+1} j(j-1) = (n+1)((n+1)-1) + \sum_{j=2}^{n} j(j-1) = n(n+1) + \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{3n(n+1)+(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(3+(n-1))}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

34 Man beweise mittels vollständiger Induktion: $\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n(2n^2+6n+4)}{6}$ $(n \geq 1)$.

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n(2n^2+6n+4)}{6}$ für $n \geq 1$.

Induktionsbehauptung: $\sum\limits_{j=1}^{n+1} j(j+1) = \frac{(n+1)(2(n+1)^2+6(n+1)+4)}{6} = \frac{2(n+1)((n+1)^2+3(n+1)+2)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)^2+3(n+1)+2)}{3} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1+3n+3+2)}{3} = \frac{(n+1)(n(n+2)+3n+6)}{3} = \frac{(n+1)(n(n+2)+3(n+2))}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

Induktionsanfang ($n=1$): $\sum\limits_{j=1}^{1} j(j+1) = 1(1+1) = 2 = \frac{12}{6} = \frac{1(2\cdot1^2+6\cdot1+4)}{6}$.

Induktionsschluss: $\sum\limits_{j=1}^{n+1} j(j+1) = (n+1)((n+1)+1) + \sum\limits_{j=1}^{n} j(j+1) = (n+1)(n+2) + \frac{n(2n^2+6n+4)}{6} = \frac{6(n+1)(n+2)+n(2n^2+6n+4)}{6} = \frac{2\big(3(n+1)(n+2)+n(n^2+3n+2)\big)}{6} = \frac{3(n+1)(n+2)+n(n^2+3n+2)}{3} = \frac{3(n+1)(n+2)+n(n^2+2n+1+n+1)}{3} = \frac{3(n+1)(n+2)+n((n+1)^2+(n+1))}{3} = \frac{3(n+1)(n+2)+n(n+1)((n+1)+1)}{3} = \frac{(n+1)(3(n+2)+n(n+2))}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

Anmerkung nach der Übung: Mit einer Umformung geht es leichter: $2n^2+6n+4 = 2(n^2+3n+2) = 2(n+1)(n+2)$. Dadurch ergibt sich die Induktionsvorraussetzung $\sum\limits_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n(2n^2+6n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, die Induktionsbehauptung $\sum\limits_{j=1}^{n+1} j(j+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$ und der Induktionsschluss $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{3(n+1)(n+2)+n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

36 Man beweise mittels vollständiger Induktion: $\sum\limits_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{n-1}{n}$ $(n \geq 2)$.

Induktionsvoraussetzung: $\sum\limits_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{n-1}{n}$ $(n \geq 2)$.

Induktionsbehauptung: $\sum\limits_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

Induktionsanfang ($n=2$): $\sum\limits_{j=2}^{2} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2}$.

Induktionsschluss: $\sum\limits_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{(n+1)n} + \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{(n+1)n} + \frac{n-1}{n} = \frac{1+(n+1)(n-1)}{(n+1)n} = \frac{1+n^2-1}{(n+1)n} = \frac{n^2}{(n+1)n} = \frac{n}{n+1}$.

38 Man beweise mittels vollständiger Induktion: $\sum\limits_{j=1}^{n} j3^{j-1} = \frac{3^n(2n-1)+1}{4}$ für $n \geq 1$.

Induktionsvoraussetzung: $\sum\limits_{j=1}^{n} j3^{j-1} = \frac{3^n(2n-1)+1}{4}$ für $n \geq 1$.

Induktionsbehauptung: $\sum\limits_{j=1}^{n+1} j3^{j-1} = \frac{3^{n+1}(2(n+1)-1)+1}{4} = \frac{3^{n+1}(2n+1)+1}{4}$.

Induktionsanfang ($n=1$): $\sum\limits_{j=1}^{1} j3^{j-1} = 1 = \frac{4}{4} = \frac{3^1(2\cdot1-1)+1}{4}$.

Induktionsschluss: $\sum\limits_{j=1}^{n+1} j3^{j-1} = (n+1)3^n + \sum\limits_{j=1}^{n} j3^{j-1} = (n+1)3^n + \frac{3^n(2n-1)+1}{4} = \frac{4(n+1)3^n+3^n(2n-1)+1}{4} = \frac{3^n(4(n+1)+(2n-1))+1}{4} = \frac{3^n(4n+4+2n-1)+1}{4} = \frac{3^n(6n+3)+1}{4} = \frac{3\cdot 3^n(2n+1)+1}{4} = \frac{3^{n+1}(2n+1)+1}{4}$.

39 Man beweise mittels vollständiger Induktion: $\sum\limits_{k=1}^{n} k5^k = \frac{5}{16}(n5^{n+1} - (n+1)5^n + 1)$ für $n \geq 1$.

Induktionsvoraussetzung: $\sum\limits_{k=1}^{n} k5^k = \frac{5}{16}(n5^{n+1} - (n+1)5^n + 1)$ für $n \geq 1$.

Induktionsbehauptung: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k5^k = \frac{5}{16}((n+1)5^{n+2} - (n+2)5^{n+1} + 1) = \frac{5}{16}((n+1)5 \cdot 5^{n+1} - (n+2)5^{n+1} + 1) = \frac{5}{16}(5^{n+1}((n+1)5 - (n+2)) + 1) = \frac{5}{16}((4n+3)5^{n+1} + 1)$.

Induktionsanfang ($n = 1$): $\sum\limits_{k=1}^{1} k5^k = 5 = \frac{5}{16}(1\cdot 5^{1+1} - (1+1)5^1 + 1) = \frac{5}{16}(25-10+1) = \frac{5}{16}(16) = 5$.

Induktionsschluss: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k5^k = (n+1)5^{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} k5^k = (n+1)5^{n+1} + \frac{5}{16}(n5^{n+1} - (n+1)5^n + 1) = \frac{5}{16}(\frac{16(n+1)5^{n+1}}{5} + n5^{n+1} - (n+1)5^n + 1) = \frac{5}{16}(16(n+1)5^n + n5^{n+1} - (n+1)5^n + 1) = \frac{5}{16}(n5^{n+1} + 16(n+1)5^n - (n+1)5^n + 1) = \frac{5}{16}(n5^{n+1} + (n+1)5^n(16-1) + 1) = \frac{5}{16}(n5^{n+1} + (n+1)5^n \cdot 15 + 1) = \frac{5}{16}(n5^{n+1} + (n+1)5^n \cdot 3 \cdot 5 + 1) = \frac{5}{16}(n5^{n+1} + 3(n+1)5^{n+1} + 1) = \frac{5}{16}(5^{n+1}(n + 3(n+1)) + 1) = \frac{5}{16}((4n+3)5^{n+1} + 1)$.

40 Man beweise mittels vollständiger Induktion: $\sum\limits_{l=1}^{n} \frac{l}{3^l} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsvoraussetzung: $\sum\limits_{l=1}^{n} \frac{l}{3^l} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbehauptung: $\sum\limits_{l=1}^{n+1} \frac{l}{3^l} = \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{4\cdot 3^{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang ($n = 0$): $\sum\limits_{l=1}^{0} \frac{l}{3^l} = 0 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{2\cdot 0+3}{4\cdot 3^0}$.

Induktionsschluss: $\sum\limits_{l=1}^{n+1} \frac{l}{3^l} = \frac{n+1}{3^{n+1}} + \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{l}{3^l} = \frac{n+1}{3^{n+1}} + \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n} = \frac{3}{4} + \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n} = \frac{3}{4} + \frac{4(n+1)-3(2n+3)}{4\cdot 3^{n+1}} = \frac{3}{4} + \frac{4n+4-6n-9}{4\cdot 3^{n+1}} = \frac{3}{4} + \frac{-2n-5}{4\cdot 3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{4\cdot 3^{n+1}}$.

44 Man untersuche mittels vollständiger Induktion, für welche $n \geq 0$ die angegebene Ungleichung gilt: $9n^3 - 3 \leq 8^n$.

n	$9n^3-3$	8^n
0	-3	1
1	6	8
2	69	64
3	240	512
4	573	4096
5	1122	32768

Es liegt die Vermutung nahe, dass dies ab $n = 3$ gilt, was nun durch vollständige Induktion bewiesen werden muss.

Induktionsvoraussetzung: $9n^3 - 3 \leq 8^n$ für $n \geq 3$.

Induktionsbehauptung: $9(n+1)^3 - 3 \leq 8^{n+1}$.

Induktionsanfang ($n = 3$): Siehe Tabelle links.

Induktionsschluss: Aus $9n^3-3 \leq 8^n|\cdot 8 \Leftrightarrow 8(9n^3-3) \leq 8^{n+1}$ folgt (wegen der Transitivität), dass die Induktionsbehauptung stimmen muss, wenn $9(n+1)^3-3 \leq 8(9n^3-3)$ für $n \geq 3$ gilt. $9(n+1)^3 - 3 \leq 72n^3 - 24 \Leftrightarrow 9(n+1)^3 \leq 72n^3 - 21 \Leftrightarrow (n+1)^3 \leq 8n^3 - 7/3 \Leftrightarrow n^3+3n^2+3n+1 \leq 8n^3-7/3 \Leftrightarrow 0 \leq 7n^3-3n^2-3n-10/3$. Für $n = 3$ ist dies ca. 149.7, also ≥ 0, und wegen $(7n^3 - 3n^2 - 3n - 10/3)'$ für $n = 3$ gleich $168 > 0$ ist die Entwicklung streng monoton steigend. Gilt daher für $n \geq 3$, also ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

45 Man untersuche mittels vollständiger Induktion, für welche $n \geq 0$ die angegebene Ungleichung gilt: $4n^2 \leq 2^n$.

n	$4n^2$	2^n
0	0	1
1	4	2
2	16	4
3	36	8
4	64	16
5	100	32
6	144	64
7	196	128
8	256	256
9	324	512

Es liegt die Vermutung nahe, dass dies ab $n = 8$ gilt, was nun durch vollständige Induktion bewiesen werden muss.

Induktionsvoraussetzung: $4n^2 \leq 2^n$ für alle $n \geq 8$.

Induktionsbehauptung: $4(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$.

Induktionsanfang ($n = 8$): $256 = 4 \cdot 8^2 \leq 2^8 = 256$.

Induktionsschluss: Aus $4n^2 \leq 2^n| \cdot 2 \Leftrightarrow 8n^2 \leq 2^{n+1}$ folgt (wegen der Transitivität), dass die Induktionsbehauptung stimmen muss, wenn $4(n+1)^2 \leq 8n^2$ für $n \geq 8$ gilt. $4(n+1)^2 \leq 8n^2|/4 \Leftrightarrow (n+1)^2 \leq 2n^2|sqrt \Leftrightarrow n+1 \leq \sqrt{2}n| - n \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{2}n - n \Leftrightarrow 1 \leq n(\sqrt{2}-1)$. Es muss also noch gezeigt werden, dass $1 \leq n(\sqrt{2}-1)$ für $n \geq 8$ gilt. FÃ¼r $n = 8$ ist $n(\sqrt{2}-1) \geq 1$, und die Funktion ist (wegen $(n(\sqrt{2}-1))' > 0$ für $n = 8$) streng monoton steigend. Also ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

Anmerkung nach der Übung: Es ist einfacher, wenn man den Term $1 \leq n(\sqrt{2}-1)$ weiter Umformt: $1 \leq n(\sqrt{2}-1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}-1} \leq n$. Wir beweisen für $n \geq 8$, also muss gelten $\frac{1}{\sqrt{2}-1} \approx 2.4 \leq 8$, was offensichtlich wahr ist.

46 Man untersuche mittels vollständiger Induktion, für welche $n \geq 0$ die angegebene Ungleichung gilt: $3n + 2^n \leq 3^n$.

n	$3n+2^n$	3^n
0	0	1
1	5	3
2	10	9
3	17	27
4	28	81
5	47	243

Es liegt die Vermutung nahe, dass dies ab $n = 3$ gilt, was nun durch vollständige Induktion bewiesen werden muss.

Induktionsvoraussetzung: $3n + 2^n \leq 3^n$ für $n \geq 3$.

Induktionsbehauptung: $3(n+1) + 2^{n+1} \leq 3^{n+1}$.

Induktionsanfang ($n = 3$): Siehe Tabelle links.

Induktionsschluss: Aus $3n+2^n \leq 3^n | \cdot 3 \Leftrightarrow 3(3n+2^n) \leq 3^{n+1}$ folgt (wegen der Transitivität), dass die Induktionsbehauptung stimmen muss, wenn $3(n+1) + 2^{n+1} \leq 3(3n+2^n)$ gilt. $3(n+1) + 2^{n+1} \leq 3(3n+2^n) \Leftrightarrow 3n+3+2\cdot 2^n \leq 9n+3\cdot 2^n \Leftrightarrow 3 \leq 6n+2^n \Leftrightarrow$ ist für $n \geq 3$ offensichtlich gegeben, also ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

56 Man bestimme rechnerisch (ohne Taschenrechner) und graphisch Summe und Produkt der komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = [2, -\frac{\pi}{4}]$.

$z_2 = [2, -\frac{\pi}{4}] = 2(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i(\sin -\frac{\pi}{4})) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$
$z_1 + z_2 = 4 + 5i + \sqrt{2} - i\sqrt{2} = (4+\sqrt{2}) + i(5-\sqrt{2})$.
$z_1 \cdot z_2 = (4-5i)(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}}(1-i)$

75 Lösen Sie die folgenden Kongruenzen (d.h. Gleichungen in Restklassen in $\mathbb{Z}$) bzw. beweisen Sie die Unlösbarkeit (in $\mathbb{Z}$).

a $6x \equiv 3 \mod 9$

$ggT(6,9) = 3$ und $3|3$, es gibt also 3 inkongruente Lösungen.

Aus $6x \equiv 3 \mod 9 \Leftrightarrow 3\cdot 2x \equiv 3\cdot 1 \mod 3\cdot 3$ folgt, dass die Lösungen $2x \equiv 1 \mod 3$ erfüllen müssen (wegen $3\cdot 2x \equiv 3\cdot 1 \mod 3\cdot 3 \Leftrightarrow 3\cdot 3|3\cdot 2x - 3\cdot 1 \Leftrightarrow 3\cdot 3|3(2x-1) \Leftrightarrow 3|2x-1$).

Wegen $ggT(2,3) = 1$ besitzt $2x \equiv 1 \mod 3$ genau eine Lösung, nämlich $\bar{2} \in \mathbb{Z}_3$.

Die 3 Lösung zu $6x \equiv 3 \mod 9$ sind also 3 inkongruente Vertreter aus $\mathbb{Z}_9$, die zu $\bar{2} \in \mathbb{Z}_3$ kongruent sind, das sind z.B. $2, 2+3, 2+2\cdot 3$, also lautet die Lösung $\bar{2}, \bar{5}, \bar{8} \in \mathbb{Z}_9$.

b $6x \equiv 4 \mod 9$

Besitzt keine Lösung, weil $ggT(6,9) = 3 \nmid 4$.

Genauer: Gesucht sind Lösungen in $\mathbb{Z}$, also Vertreter von $\mathbb{Z}_9$. $6x \equiv 4 \mod 9 \Leftrightarrow 9 \mid (6x-4)$, also $9\cdot k = 6x - 4$, $k \in \mathbb{Z}$. $9\cdot k = 6x - 4 \Leftrightarrow 9\cdot k + 4 = 6x \Leftrightarrow \frac{9\cdot k+4}{6} = x$. $\Leftrightarrow \frac{3}{2}k + \frac{2}{3} = x$. Wegen $k \in \mathbb{Z}$ kann x nicht in $\mathbb{Z}$ liegen (da $\frac{3}{2}k$ nie $\frac{1}{3}$ Rest liefert), also gibt es keine Lösung.

79 Lösen Sie die folgenden Kongruenzen (d.h. Gleichungen in Restklassen in $\mathbb{Z}$) bzw. beweisen Sie die Unlösbarkeit (in $\mathbb{Z}$).

a $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \mod 5$

Aus $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \mod 5 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \equiv 0 \mod 5$ folgt $5|(x-1)(x-2)$, dies ist nur möglich wenn $(x-1) = 0$ oder $(x-2) = 0$, also sind die Lösungen $\bar{1}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_5$.

b $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \mod 6$

Aus $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \mod 6 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \equiv 0 \mod 6$ folgt $6|(x-1)(x-2) \Leftrightarrow 2 \cdot 3|(x-1)(x-2) \Leftrightarrow 2|(x-1)(x-2) \wedge 3|(x-1)(x-2)$. Da immer einer der beiden Terme $(x-1)$ oder $(x-2)$ gerade ist, ist 2 immer Teiler von $(x-1)(x-2)$. 3 teilt $(x-1)(x-2)$, wenn wenn x in $\bar{1}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_3$ liegt, Lösung sind also alle Kongruenzklassen von $\mathbb{Z}_6$, die in $\bar{1}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_3$ liegen, dies sind $\bar{1}, \bar{2}, \overline{1+3}, \overline{2+3}$, also $\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5} \in \mathbb{Z}_6$.

Literatur

[KL05] Guenther Karigl and Stefan Lenk. Mathematik 1 fuer informatiker. Institut fuer Diskrete Mathematik und Geometrie TU Wien, 2005. Skriptum zur Vorlesung an der TU Wien.

[RS05] Kristina Reiss and Gerald Schmieder. *Basiswissen Zahlentheorie.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2005.