

Lösungen zu Mathematik für Informatiker I Übungen Wintersemester 2006

Alexander (Axel) Straschil

14. Dezember 2006

Diese Lösungen zu der Übung Mathematik für Informatiker I, Wintersemester 2006, entstand im laufe meines Informatikstudiums an der Technischen Universität Wien. Fehlerhinweise bitte per Email an axel@straschil.com.

137 Man beweise nachstehende Identitäten für Binominalkoeffizienten:

a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k} \square$$

b $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \frac{n!}{k!(n-(k+1))!(n-k)} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-(k+1))!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-(k+1))!} = \frac{n!(n-k) + n!(k+1)}{k!(n-(k+1))!(n-k)(k+1)} = \frac{n!(n-k+k+1)}{k!(n-(k+1))!(n-k)(k+1)} = \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-(k+1))!(n-k)(k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-(k+1))!(n-k)(k+1)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-(k+1))!(n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} \square \end{aligned}$$

c $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Beweis mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n. \square$$

Beweis mit Hilfe der Kombinatorik: Der Binominalkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der möglichen Teilmengen mit k Elementen aus einer Menge mit n Elementen an. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ ist also die Summe der Anzahlen aller Teilmenge einer n elementigen Menge, die man mit $k = 0, \dots, n$ Elemente dieser Menge bilden kann, also in Summe alle Teilmengen, die man aus einer Menge mit n Elementen bilden kann. Das entspricht der Mächtigkeit der Potenzmenge über einer Menge mit n Elementen, und zu einer Menge mit n Elementen kann man genau 2^n Teilmengen bilden \square .

Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion:

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Induktionsbehauptung: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$

Induktionsanfang für $n = 0$: $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{0} = 1 = 2^0$

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} = 1 + \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) = 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} = 1 + 2^n + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} = 1 + 2^n + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{(k-1)+1} = 1 + 2^n + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} = 1 + 2^n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} = 1 + 2^n + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n+1} = 1 + 2^n + 2^n - 1 - 0 = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. \square

144 Berechnen Sie unter Benützung des binomischen Lehrsatzes: $\sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k}$

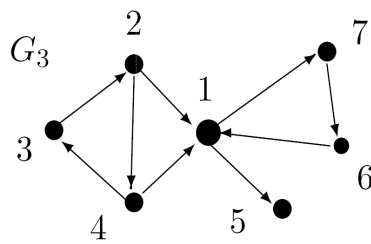
Der binomische Lehrsatz lautet: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, mit dessen Hilfe soll die Angabe gelöst werden, man muss also versuchen die Angabe auf die Form des binomischen Lehrsatzes zu bekommen.

Hilfssatz: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, Beweis: $k \binom{n}{k} = \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!} = \frac{k \cdot n!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1)-(k-1)!} = n \binom{n-1}{k-1}$. \square

Mit Hilfe obigen Satzes lässt sich die Angabe umschreiben: $\sum_{k=0}^n n \binom{n-1}{k-1} (-1)^k$. Da n konstant ist kann man es vor die Summe stellen: $n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} (-1)^k$. Wir definieren nun eine Variable $j := n - 1$, setzten diese ein: $n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{j}{k-1} (-1)^k$, und nehmen das erste Summenelement aus der Summe (dafür muss der Summenzähler von $k = 0$ auf $k = 1$ erhöht werden): $n \cdot \left(\binom{j}{0-1} (-1)^0 + \sum_{k=1}^n \binom{j}{k-1} (-1)^k \right)$, der herausgenommene Term ergibt 0 (wegen $\binom{j}{-1} = 0$), also bleibt: $n \cdot \sum_{k=1}^n \binom{j}{k-1} (-1)^k$. Die Laufvariable der Summe wird nun umgeschrieben, indem sie um eins verringert beginnt und endet, und dafür im Term der Summe um eins erhöht wird: $n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{j}{(k+1)-1} (-1)^{k+1}$. Jetzt wird

$n-1$ wieder durch j ersetzt und Binominalkoeffizient vereinfacht: $n \cdot \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{k+1}$.
Wegen $(-1)^{k+1} = -1 \cdot (-1)^k$: $n \cdot \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)(-1)^k$, und -1 kann als konstanter Faktor vor die Summe gestellt werden: $-n \cdot \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^k$. Das entspricht nun schon fast dem binomischen Lehrsatz, da 1 potenziert mit einer natürlichen Zahl immer 1 ergibt erweitern wir noch um 1^{j-k} : $-n \cdot \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} 1^{j-k} (-1)^k$. Mit Hilfe des binomische Lehrsatzes kann man nun die Summe auflösen: $-n \cdot (1-1)^j = -n \cdot 0^j = 0$.

170 Man bestimme die kleinste transitive Relation R , die G_3 (als Relation aufgefasst) enthält.



Jede binäre Relation kann als gerichteter Graph dargestellt werden, umgekehrt kann auch jeder gerichtete Graph (ohne Mehrfachkanten) als binäre Relation interpretiert werden. Zwei Elemente stehen in Relation zueinander, wenn sie adjazent sind, also in einem gerichteten Grad eine Kante von dem ersten zu dem zweiten Element existiert.

Eine Relation R ist transitiv wenn $xRy, yRz \rightarrow xRz$, die transitive Hülle sind alle Paare (x, y) mit $\exists z_0, \dots, z_n : x = z_0, b = y_n, z_{i-1}Rz_i, i \in \mathbb{N}$, also alle Elemente, die über eine Kette von Relationen zueinander in Relation stehen, ergänzt man die transitive Hülle um alle reflexive Paare (x, x) , so spricht man von der reflexiv transitiven Hülle. R^+ ist die kleinste transitive Hülle, R^* die kleinste reflexiv transitive Hülle die R enthält.

Der gegebene Graph kann als Relation $G_3 \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, $G_3 = \{(1, 6), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (7, 6)\}$ definiert werden. G_3 ist nicht transitiv, wie z.B. durch $1G_37, 7G_36, 1G_36$ ersichtlich. Das Bestimmen der kleinsten transitiven Relation R entspricht dem Bestimmen der kleinsten transitiven Hülle von G_3 , also G_3^+ .

Hierzu muss man eine Relation zwischen allen Relationen herstellen, die eine transitive Relation besitzen, die hierbei hinzugefügten Relationen müssen dabei jedes mal berücksichtigt werden, was das Verfahren sehr aufwändig macht. Das Überprüfen ob der Graph transitiv ist hat die Laufzeit $O(n^2)$, eine doppelte Schleife über die n Knoten ebenfalls $O(n^2)$, ergibt zusammen eine Laufzeit von $O(n^4)$.

- $R = G_3^+$:
- 1: 1,5,6,7
 - 2: 1,2,3,4,5,6,7
 - 3: 1,2,3,4,5,6,7
 - 4: 1,2,3,4,5,6,7
 - 5:
 - 6: 1,5,6,7
 - 7: 1,5,6,7

Mit dem Algorithmus von Stephen Warshall kann die transitive Hülle in $O(n^3)$ ermittelt werden. Man geht hierfür der Reihe nach die Knotenteilmengen $k_i = \{k | k \leq i, i = 1, \dots, n\}$ durch und kontrolliert ob es einen Pfad zwischen zwei Knoten gibt, dessen innere Knoten eine Teilmenge von k_i sind.

In der Tabelle links ist die Lösungsrelation R angeführt.

Diese ist bei genauerer Betrachtung des Graphen G_3 offensichtlich: Der Knoten 5 steht zu keinem andern Knoten in Relation,

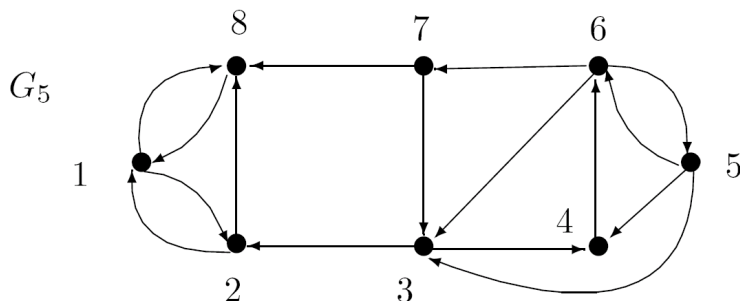
kann also auch keine Relationen bilden.

Weiters besteht der Graph aus drei starken Zusammenhangskomponenten: $k_1 = \{2, 3, 4\}$, $k_2 = \{1, 6, 7\}$ und $k_3 = \{5\}$, welche eine Partition des Graphen bilden. Diese Klasseneinteilung ist eine transitive Relation $K = \{(k_1, k_1), (k_1, k_2), (k_2, k_2), (k_2, k_3)\}$.

K^+ :
 $k_1: k_1, k_2, k_3$
 $k_2: k_2, k_3$
 $k_3:$

Die transitive Hülle K^+ dieser Klasseneinteilung entspricht dann genau R bzw. G_3^+ .

175 Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten und die Reduktion G_{5R} des Graphen G_5 .



Ein Graph G ist stark zusammenhängend, wenn es zu jedem Knotenpaar $(u, v) \subseteq G$ einen Weg von u nach v , und einen Weg von v nach u gibt (in dem alle auftretenden Knoten und Kanten verschieden sind), die

Zusammenhangskomponenten sind die (grösstmöglichen) zusammenhängenden Teilgraphen des Graphen. Die starken Zusammenhangskomponenten bilden eine Äquivalenzrelation auf dem Graph.

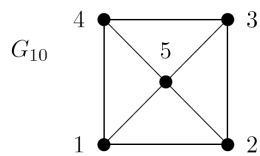
Die starken Zusammenhangskomponenten von G_5 sind: $Z_1 = (1, 2, 8)$ und $Z_2 = (3, 4, 5, 6, 7)$.

„Eine Reduktion ist ein Graph auf den starken Zusammenhangskomponenten als Knoten und dieser Graph hat genau dann eine Kante wenn der ursprüngliche Graph eine Kante hat von einer starken Zusammenhangskomponente zur anderen.“[?]

Von Z_1 nach Z_2 gibt es keine Kanten, von Z_2 nach Z_1 zwei, nämlich $(7, 8)$ und $(3, 2)$, also ist die gesuchte Reduktion $G_{5R} = \{(Z_2, Z_1)\}$.

188 Man bestimme im Graphen G_{10} mit Hilfen von $A_{G_{10}}^3$ die Anzahl der Dreiecke (d.h. die Anzahl der Kreise der Länge 3).

Die Adjazenzmatrix A eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine uv Matrix mit $a_{uv} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } (u, v) \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$. Da G_{10} ein ungerichteter Graph ist muss die Adjazenzmatrix symmetrisch sein. $A_{G_{10}}^3$ ist die dritte Potenz der Adjazenzmatrix $A_{G_{10}}$



$A_{G_{10}}^3 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$, gesucht werden alle Kreise der Länge 3.

Ein Kreis ist ein Weg mit gleichem Start- und Endpunkt. Die gesuchten Kreise der Länge 3 haben also die Struktur (u, v, u) und sollen mit Hilfe der Matrix gefunden werden.

Hierzu muss man sich die Aussagekraft der Matrix betrachten. Die Matrix $A_{G_{10}}$ sagt aus, welche Knotenpaare (u, v) adjazent sind. Die Hauptdiagonale von $A_{G_{10}}$ besteht nur aus Nullen, da kein Knoten mit sich selbst verbunden ist.

Berechnung von $A_{G_{10}}^3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Bei der Quadrierung von $A_{G_{10}}$ wird jede Zelle von $A_{G_{10}}^2$ berechnet, indem man die Zeilen und Spalten der Matrix einzeln multipliziert und die einzelnen Produkte zusammenzählt, also $a_{uv}^2 = \sum_{k=1}^5 a_{uk}b_{kv}$, für die Hauptdiagonale $a_{uu}^2 = \sum_{k=1}^5 a_{uk}b_{ku}$. Die einzelnen Produkte in der Hauptdiagonale ergeben 1, wenn die beiden Knoten adjazent sind und 0, wenn es keine Kante zwischen den Knoten gibt.

$$\begin{array}{r|rrrr} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 8 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 8 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$$

Z.B.: $a_{11}^2 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$, entstanden durch den Adjazenztest auf den Knotenpaaren $(1, 1) \cdot (1, 1)$, $(1, 2) \cdot (2, 1)$, $(1, 3) \cdot (3, 1)$, $(1, 4) \cdot (4, 1)$, $(1, 5) \cdot (5, 1)$, da der Graph ungerichtet ist fällt der Adjazenztest Knotenpaar für das Knotenpaar (u, v) immer gleich wie für (v, u) und ergibt eben 1 wenn eine Kante existiert, 0 sonst. Die Summe der Produkte, also $a_{uu}^2 = \sum_{k=1}^5 a_{uk}b_{ku}$ ist dann die Anzahl aller Knoten die zu dem Knoten u direkt adjazent sind. Zusammengezählt (also die Summe der Hauptdiagonale) ergibt dies die Summe der Kantenfolgen der Länge 2 des Graphen, in unserem Fall $3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 16$, da jede Kantenfolge zwei mal gezählt wurde, $((u, v)$ und $(v, u))$ ist die Zahl der Kanten $\frac{16}{2} = 8$.

Durch erneute Multiplikation $A_{G_{10}}^2 \cdot A_{G_{10}} = A_{G_{10}}^3$ werden in der Hauptdiagonalen im Wert a_{uu}^3 all jene mögliche Kanten gezählt, die wieder zurück auf den Knoten u indizieren, also alle Kreise der Länge 3.

Für die Knoten 1 bis 4 sind es jeweils 4 mögliche, für den Knoten 5 gibt es 8. Dies ist leicht zu verifizieren. Der Knoten 1 ist an der 4 Kreisen $(1, 2, 5)$, $(1, 5, 2)$, $(1, 4, 5)$ und

(1, 5, 4) beteiligt. Wie man hier sieht werden in der Matrix alle Permutationen eines Kreises berücksichtigt. Die Summe aller Permutationen erhält man durch Summierung der Hauptdiagonalen: $\sum_{k=1}^5 a_{uu}^3 = 4 + 4 + 4 + 4 + 8 = 24$. Jeder Kreis besitzt (wegen der Länge 3) 3! Permutationen, also ist die gesuchte Anzahl der Kreise der Länge 3: $\frac{24}{3!} = 4$.

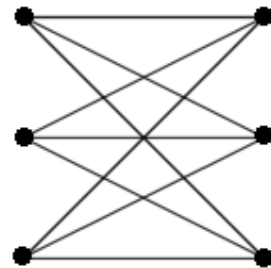
198 Man zeige mit Hilfe eines geeigneten graphentheoretischen Modells, dass es in jeder Stadt mindestens zwei Bewohner mit der gleichen Anzahl von Nachbarn gibt.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, die Knoten $v \in V$ die Bewohner der Stadt, und die Kanten $e \in E$ die Relation „ist Nachbar von“. Der Graph kann ungerichtet sein, denn wenn A Nachbar von B, dann auch B Nachbar von A.

Kein Bewohner kann Nachbar von sich selbst sein, und jeder Bewohner kann zu einem bestimmten anderen Bewohner nur eine Nachbarschaft besitzen, also von v_1 zu v_2 gibt es max. eine Kante. Dann existiert also eine maximale Nachbarschaft für einen Bewohner von $d_{max}^+ = \max(d^+(|V|)) = |V| - 1$. Weiters wird angenommen dass jeder mindestens einen Nachbar besitzt, sollte dies nicht der Fall sein, so werden einfach alle Bewohner ohne Nachbarn aus dem Graph genommen. Also ist $d_{min}^+ = \min(d^+(|V|)) = 1$. Es gibt also $|V|$ Bewohner, und $|V| - 1$ verschiedene Grade von Nachbarschaften, also eine grössere Menge von Nachbarn, auf die man eine kleinere Menge von Nachbarschaftsgrade aufteilen muss, daher geht nach dem Schubfachprinzip direkt hervor, dass mindestens ein Nachbarschaftsgrad doppelt vorkommen muss.

201 Für welche m, n besitzt der vollständige paare Graph $K_{m,n}$ eine geschlossene Hamiltonsche Linie? (Die Knotenmenge V eines vollständigen paaren Graphen $K_{m,n}$ besteht aus 2 disjunkten Teilmengen V_1, V_2 mit $V_1 = m$ und $V_2 = n$ und die Kantenmenge E besteht aus allen ungerichteten Kanten (v_1, v_2) mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$.)

Ergänzende Definition aus [?]: „Ein ungerichteter Graph G heisst ein paarer Graph, wenn die Knotenmenge $V(G)$ in zwei Klassen $V(G) = V_1(G) \cup V_2(G)$ zerlegbar ist, derart, dass nur Kanten existieren, bei denen ein Endpunkt in $V_1(G)$ und der andere Endpunkt in $V_2(G)$ liegt. Die bezüglich der Kantenmenge maximalen Graphen mit dieser Eigenschaft heissen vollständig paare Graphen, symb. $K_{m,n}$, falls $|V_1(G)| = m, |V_2(G)| = n$.“



Der Graph rechts im Bild ist ein $K_{3,3}$ Graph. $V_1(G)$ sind die linken drei Knoten, $V_2(G)$ die rechten drei Knoten. Die Kanten der linken Knoten sind immer indizent zu Kanten der rechten Knoten, und umgekehrt.

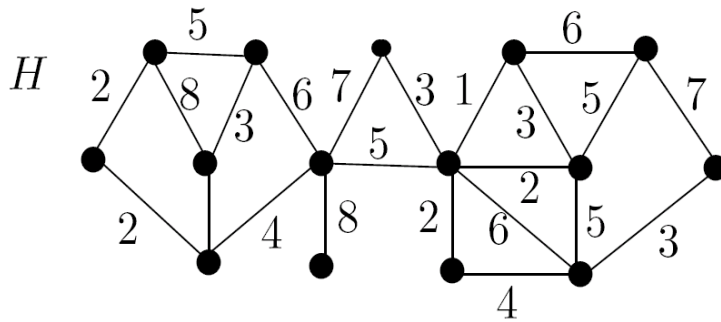
Eine Kantenfolge in G heisst geschlossene Hamiltonsche Linie, wenn sie jeden Knoten genau einmal enthält.

Im Fall eines $K_{m,n}$ Graphen heisst das: Man beginnt auf einer Knotenmenge, und geht dann immer abwechselnd zwischen den Knotenmengen hin und her, und besucht jeweils einen neuen Knoten, da der Graph ja zwischen den beiden Knotenmengen vollständig ist muss es von jedem Knoten aus der linken Knotenmenge eine Kante zu der rechten geben, und umgekehrt. Wichtig ist die Abschlussbedingung zur geschlossene Hamiltonsche Linie: Wenn ich den letzten Knoten einer Menge markiert ist, muss der nächste Zug zum Ausgangspunkt zurückkehren.

Daraus ist die Bedingung sofort offensichtlich: Ein vollständiger paare Graph $K_{m,n}$ besitzt genau dann eine geschlossene Hamiltonsche Linie, wenn $m = n$.

Beweis: Wenn dies nicht der Fall ist, dann gibt es für $m > n$ oder $m < n$ eine geschlossene Hamiltonsche Linie. Sei $l = \max(m, n)$ und $r = \min(m, n)$. Da man am Ende am Ausgangsknoten gelangen muss, und man bei jedem Zug die Seite wechseln muss, muss eine gerade Anzahl von Zügen getätigt werden, um wieder zurück zu gelangen, man kann also jeweils zwei Züge zu einem Doppelzug zusammenfassen. Bei jedem Doppelzug werden freien Kanten auf jeder Seite im eine verringert, also $l' = l - 1$ und $r' = r - 1$. Nach dem r -ten Zug sind rechts alle Kanten verbraucht, links muss aber wegen $l > 4$ noch mindestens eine Kanten übrig sein, wodurch die Anforderung einer geschlossene Hamiltonsche Linie nicht gegeben ist.[]

206 Man bestimme im folgenden Graphen H mit Hilfe des Kruskalalgorithmus einen minimalen und einen maximalen spannenden Baum.



Das in der originalen Angabe für die Kante \overline{ON} fehlende Gewicht war in der betroffenen Übung mit 5 anzunehmen, die Knotenbeschriftungen sind ebenfalls im Original nicht vorhanden.

e_{min}	$w(e)$	e_{max}	$w(e)$
EJ	1	BO	8
JK	2	LM	8
JI	2	DM	7
AB	2	FG	7
AN	2	CM	6
GH	3	EF	6
DJ	3	HJ	6
CO	3	BC	5
HI	4	JM	5
MN	4	FK	5
BC	5	HK	5
JM	5	NO	5
FK	5	HI	4
LM	8	AB	2

Der Algorithmus von Kruskal zur Bestimmung eines minimalen bzw. maximalen Spannbaumes von ungerichteten gewichteten Graphen (hier wird der Algorithmus für minimal angeführt, für maximal einfach entsprechend vertauschen): Sei $G = (V, E, w)$ der Ausgangsgraph und $G_{mst} = (V, E')$ der zu bildende minimale Spannbaum, zu Beginn ist E' leer. Es wird fortlaufend aus $E - E'$ eine Kante e gewählt, mit der Eigenschaft, dass $w(e)$ minimal ist und $(V, E' \cup e)$ keinen Kreis enthält (enthält $(V, E' \cup e)$ einen Kreis ist die Auswahl für den Schritt solange mit

$E - e - E'$ fortzuführen, bis ein e gefunden wurde). Wenn (nach $|V| - 1$ Schritten) alle Knoten von E' indiziert werden ist $G_{mst} = (V, E')$ gefunden.

$H_{min} = (V, E_{min})$ mit $E_{min} = \{(E, J), (J, K), (J, I), (A, B), (A, N), (G, H), (D, J), (C, O), (H, I), (M, N), (B, C), (J, M), (F, K), (L, M)\}$ und $\sum_{e \in E_{min}} w(e) = 49$.

$H_{max} = (V, E_{max})$ mit $E_{max} = \{(B, O), (L, M), (D, M), (F, G), (C, M), (E, F), (H, J), (B, C), (J, M), (F, K), (H, K), (N, O), (H, I), (A, B)\}$ und $\sum_{e \in E_{max}} w(e) = 79$.

Der mit Kruskal ermittelte Spannbaum muss nicht eindeutig sein, nur die Gewichtsumme ist immer gleich (maximal oder minimal)!

208 Die externe Pfadlänge eines Tries ist die Summe der Abstände von der Wurzel zu allen besetzten Endknoten des Baumes, wobei die Abstände in der Anzahl der Kanten auf dem entsprechenden Weg gemessen werden. Wie gross ist die externe Pfadlänge eines Tries, der N Daten enthält, mindestens? (Hinweis: Welche Gestalt des Binärbaums führt zu kleiner Pfadlänge?)

Ein Trie ist ein binärer Baum, der dem Aufsuchen von Schlüsseln dient. Dabei werden die Schlüssel nie in den innern Knoten, sondern in den Blättern gespeichert. Die Schlüssel müssen über eine geeignete Funktion in ein binäres Wort abgebildet werden, z.B. der Binärcode der Codennummer eines Zeichen. Durch dieses binäre Wort wird dann der Schlüssel im Trie abgebildet, eine 0 ist eine Verzweigung nach links, eine 1 entspricht einer Verzweigung nach rechts.

Jeder innere Knoten eines Tries besitzt zwei Kanten, jeder Kanten indiziert entweder einen neuen inneren Knoten, einen besetzten Endknoten oder einen unbesetzten Endknoten. Laut Angabe sind nur die besetzten Endknoten von Interesse.

Die externe Pfadlänge ist minimal, wenn der Baum möglichst kurze Verzweigungen aufweist, also sich die Pfadlängen maximal um 1 unterscheiden.

In einem vollen Baum der Höhe 1 kann man 2 besetzte Endknoten speichern, der Höhe 2 4 Endknoten, und der Höhe h 2^h besetzte Endknoten. Das heisst die Höhe h des Baumes mit N Daten ist $h = \lceil \log_2 N \rceil$.

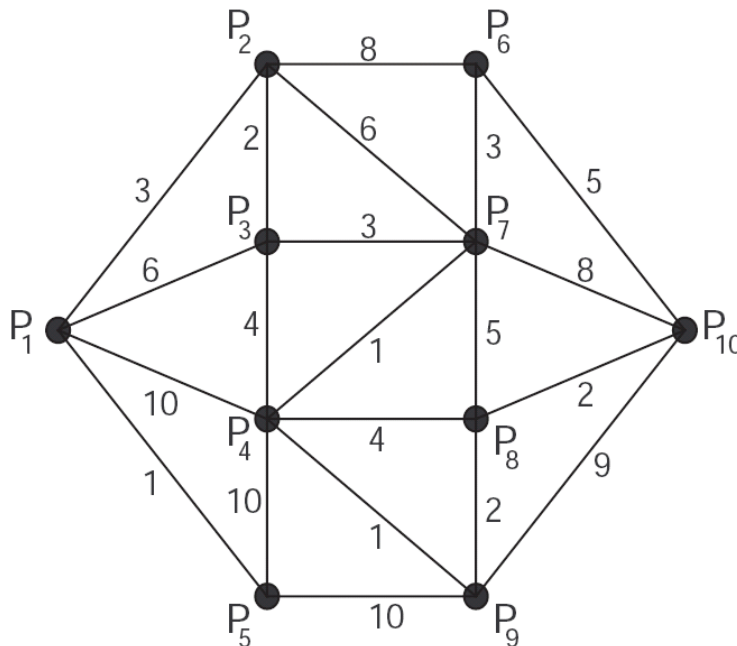
Gibt es genau 2^h besetzte Endknoten, so hat jeder eine Weglänge von h zur Wurzel, in Summen $h \cdot N$, bzw. $N \cdot \log_2 N$.

Meistens wird der Baum jedoch einige Wege der Länge h , und einige der Länge $h - 1$ aufweisen, und zwar $2^h - N$ mit der vollen Pfadlänge $h - 1$, und $N - (2^h - N) = 2N - 2^h$ mit der Pfadlänge h .

Ergibt zusammen: $(2^h - N)(h - 1) + (2N - 2^h)h$ mit $h = \lceil \log_2 N \rceil$.

211 In der folgenden schematisch skizzierten Landkarte sind für eine bestimmte Fracht die Transportkosten zwischen einzelnen Orten angegeben. Welches ist der bil-

ligste Weg vom Ort P1 zum Ort P10?



Das „kürzeste Weg Problem“ kann (für nicht negative Gewichte) mit dem Algorithmus von Dijkstra¹ ermittelt werden: Sei $G = (V, E, w)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit gewichteten Kanten, $w(e) \in \mathbb{N}$, P der Startknoten und Q der Endknoten. Es werden nun sukzessive ansteigend die kürzesten Wege weg von P gesucht, solange, bis ein kürzester Weg Q als Endknoten hat. Da

immer nur die kürzesten Wege verwendet werden ist der gefundene Weg minimal. Da der Graph $|V|$ Knoten besitzt, und in jedem Schritt ein neuer Knoten verwendet wird, dauert es max. $|V|-1$ Schritte, bis der Zielknoten gefunden wurde. Ein Schritt bedeutet dabei die Evaluierung der Kosten zu den Nachbarknoten.

Im Fall von Beispiel 211 ist der Startknoten P_1 und der Zielknoten P_{10} . Der Einfachheit halber schreibe ich die Wege und Kosten in der Form „Weg= w (Weg)“ an.

Vom Startknoten $P_1 = 0$ aus gibt es Verzweigungen $P_1P_2 = 3$, $P_1P_3 = 6$, $P_1P_4 = 10$ und $P_1P_5 = 1$. Der bis dahin kürzeste Weg ist $P_1P_5 = 1$, also gehe ich von dort aus weiter, mit der einzigen Möglichkeit $P_1P_5P_9 = 10$. Dieser Weg ist jetzt nicht mehr der kürzeste, sondern der jetzt kürzeste (mit noch nicht erforschten Knoten) ist $P_1P_2 = 3$, also weiter nach $P_1P_2P_6 = 11$ und $P_1P_2P_7 = 9$. Womit auf einmal $P_1P_3 = 6$ am kürzesten ist. Von dort geht es weiter nach $P_1P_3P_7 = 9$.

Man kann diesen Vorgang etwas schematischer in einer Tabelle zusammenstellen, Wege die keine unerforschten Knoten mehr besitzen werden durchgestrichen, der nächste Schritt setzt immer den bisher kürzesten Weg fort, gibt es zu einem Punkt bereits kürzere oder gleichlange Wege können diese vernachlässigt werden.

¹Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. Numerische Mathematik 1 (1959), S. 269-271. Unter <http://www.digizeitschriften.de/home/services/pdfterms/?ID=314537> frei verfügbar.

Die Schritte beim erstellen der Tabelle: Den Weg mit den geringsten Kosten suchen und um einen Schritt erweitern (also alle Nachbarn vom letzten Knoten des Weges) und die Kosten berechnen. Alle Wege die den gleichen Endknoten haben und teurer oder gleich teuer sind streichen. Solange durchführen, bis der Endknoten der billigste ist.

P_1	\emptyset	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_4}{}$	\emptyset	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_4 P_9 P_5}{}$	20
$\frac{P_1 P_2}{}$	3	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_7}{}$	8	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_4 P_9 P_8}{}$	12
$\frac{P_1 P_3}{}$	6	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_7 P_4}{}$	9	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_4 P_9 P_{10}}{}$	19
$\frac{P_1 P_4}{}$	10	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_7 P_6}{}$	11	$\frac{P_1 P_2 P_6 P_7}{}$	14
$\frac{P_1 P_5}{}$	11	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_7 P_8}{}$	13	$\frac{P_1 P_2 P_6 P_{10}}{}$	16
$\frac{P_1 P_5 P_4}{}$	11	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_7 P_{10}}{}$	16	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_4 P_9 P_8 P_7}{}$	17
$\frac{P_1 P_5 P_9}{}$	11	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5}{}$	19	$\boxed{\frac{P_1 P_2 P_3 P_4 P_9 P_8 P_{10}}{}}$	14
$\frac{P_1 P_2 P_3}{}$	5	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_4 P_7}{}$	10		
$\frac{P_1 P_2 P_6}{}$	11	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_4 P_8}{}$	13		
$\frac{P_1 P_2 P_7}{}$	9	$\frac{P_1 P_2 P_3 P_4 P_9}{}$	10		

Ein kürzester Weg ist also $w(P_1 P_2 P_3 P_4 P_9 P_8 P_{10}) = 14$.

215 Man zeige, dass $\langle \mathbb{Z}, \bullet \rangle$ mit der Operation $a \bullet b = a + b - ab, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ eine Halbgruppe ist. Gibt es ein neutrales Element? Wenn ja, welche Elemente haben Inverse?

Für eine Halbgruppe muss eine abgeschlossene zweistellige assoziative Operation vorliegen, assoziativ bedeutet $x * (y * z) = (x * y) * z \forall x, y, z$. Eine zweistellige Operation liegt vor, die Operationen $+, -, \cdot$ sind in \mathbb{Z} abgeschlossen. Nun ist zu untersuchen, ob diese assoziativ ist, in unserem Fall also ob $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z, \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
 x \bullet (y \bullet z) &= (x \bullet y) \bullet z \Leftrightarrow x \bullet (y + z - yz) = (x + y - xy) \bullet z \Leftrightarrow \\
 x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) &= (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z \Leftrightarrow \\
 x + y + z - yz - xy - xz + xyz &= x + y - xy + z - zx - zy + xyz \Leftrightarrow \\
 x + y + z - xy - xz - yz + xyz &= x + y + z - xy - xz - yz + xyz \text{ w.A.}
 \end{aligned}$$

$\langle \mathbb{Z}, \bullet \rangle$ mit der Operation $a \bullet b = a + b - ab, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ ist eine Halbgruppe.

Für die Existenz eines neutralen Elements muss gelten $x * e = e * x = x \forall x$, also in unserem Fall $a \bullet e = b \bullet a = a$.

$a \bullet e = e \bullet a = a \Leftrightarrow a + e - ae = e + a - ea = a$. Wenn man beim rechten Gleichungssystem bei jeder Gleichung a substrahiert erhält man $e - ae = e - ea = 0$, also $e - ae = 0$, $e(1 - a) = 0$, $e = 0$.

Das neutrale Element $e = 0$.

Für inverse Elemente gilt $x * x' = x' * x = e$, also in unserem Fall $a \bullet a' = a' \bullet a = e \Leftrightarrow a + a' - aa' = a' + a - a'a = 0$, also für $a + a' - aa' = 0$, $a' - aa' = -a$, $a'(1 - a) = -a$, $a' = -\frac{a}{1-a}$, mit $a \neq 1$.

Das inverse Element von a ist $-\frac{a}{1-a}$ mit $a \neq 1$.

239 Man ergänze die folgende Operationstafel so, dass $\langle G = \{a, b, c, d\}, * \rangle$ ein Gruppe

	$*$	a	b	c	d
ist.	a	a			
	b		c		
	c				
	d				

Wegen $a * a = a$ muss das neutrale Element a sein, also muss für alle $x \in G$ gelten:

	$*$	a	b	c	d
$x * a = a * x = x$:	a	a	b	c	d
	b	b	c		
	c	c			
	d	d			

. Nun benötigt jedes Element ein Inverses, um

Kommutativ zu bleiben immer an der Diagonalen spiegeln. Für a ist schon a selbst das Inverse, also fehlen noch Inverse für b, c, d . Da hat man jetzt freie Wahl, z.B.

	$*$	a	b	c	d
$b * c = c * b = a$,	a	a	b	c	d
$c * c = a$,	b	b	c	a	
$d * d = a$.	c	c	a	a	
	d	d		a	

. Den Rest füllt man z.B. mit d

	$*$	a	b	c	d
auf.	a	a	b	c	d
	b	b	c	a	d
	c	c	a	a	d
	d	d	d	d	a

244 Man zeige: Der Durchschnitt zweier Untergruppen ist wieder eine Untergruppe. Gilt dies auch für die Vereinigung zweier Untergruppen?

Sei G eine Gruppe mit der binären Relation $*$, $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen von G und $D = H_1 \cap H_2$ der Durchschnitt der beiden Untergruppen. Damit D eine Gruppe ist muss D assoziativ sein, ein neutrales Element existieren und jedes Element ein Inverses besitzen.

Assoziativ $(a * b) * c = a * (b * c) \forall a, b, c \in D$: Da H_1 und H_2 Gruppen sind müssen wegen der Abgeschlossenheit auch alle Elemente die aus der binären Operation für die Assoziativität hervorgehen in H_1 und H_2 enthalten, also auch in D .

Existenz des neutralen Elements e : Da H_1 und H_2 Gruppen sind besitzen sie auch beide das Neutrale Element e , also ist $e \in D$.

Existenz von inversen Elementen: Sei $a \in D$, weil G Gruppe ist existiert ein $a' \in G$ mit $a * a' = e$. Da auch H_1 und H_2 Gruppen sind und a enthalten muss a' auch in H_1 und H_2 enthalten sein, also auch in D_1 .

Der Durchschnitt zweier Untergruppen besitzt also immer die Eigenschaften einer Gruppe.

Für die Vereinigung zweier Gruppen muss dies nicht gelten. Sei $V = H_1 \cup H_2$ und $H_1, H_2 \subset G = \langle \{a, b, c, d\}, * \rangle$, die Relation $*$ wie in der Tabelle rechts definiert und $H_1 = \langle \{a, b\}, * \rangle$ und $H_2 = \langle \{a, c\}, * \rangle$. Dann ist $V = \langle \{a, b, c\}, * \rangle$ keine Gruppe, weil V wegen $b * c = d$ nicht abgeschlossen ist.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	d
c	c	d	a	d
d	d	d	d	a