Kombinatorik

Alexander (Axel) Straschil

8. Dezember 2006

Diese kurze Zusammenfassung über Permutationen, Variationen, Kombinationen und den Binomischen Lehrsatz entstand im laufe meines Informatikstudiums an der Technischen Universität Wien. Fehlerhinweise bitte per Email an axel@straschil.com.

1 Begriffe

Multimengen sind Mengen, in denen Elemente mehrfach auftreten können. Die Kardinalität einer Multimenge ist die Summe aller Auftrittshäufigkeiten der Elemente der Menge, also ist z.B. $|\{a, a, b, b, c\}| = 5$.

Die **Fakultät** $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ mit $0! = 1$. Die Fakultät ist nur auf nichtnegativen ganzen Zahlen definiert.

Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ für $k \leq n$, 0 sonst, $k, n \in \mathbb{N}$.

2 Permutationen, Kombinationen und Variationen

Permutationen sind Anordnungen von allen Elementen einer Menge oder Multimenge. **Variationen** sind Zusammenstellungen von Elementen unter Berücksichtigung der Reihenfolge. **Kombinationen** sind Zusammenstellungen von Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Bei Variationen und Kombinationen wird von Zusammenstellungen mit oder ohne Wiederholungen unterschieden, es müssen nicht alle Elemente der Menge verwendet werden.

Im folgenden wird immer nach der Anzahl der möglichen Permutationen, Variationen und Kombinationen gesucht.

Permutationen einer Menge Alle n unterscheidbaren Elemente einer Menge werden zu einem n-Tupel gebildet, jedes Element der Menge kommt also genau einmal im n-Tupel vor. Für die erste Position des n-Tupel hat man noch alle n Elemente der Menge zu Auswahl, für die zweite Position nur noch n-1 Elemente usw., für die letzte Postion bleibt nur noch ein Element zur Auswahl über. Es gibt also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ verschiedene Permutationen zu einer Menge mit n Elementen.

$$P_n = n! \text{ mit } n \geq 1$$

Permutationen einer Multimenge In einer Multimenge M mit der Kardinalität n gibt es m verschiedene Elemente, die jeweils k_i $(i = 1 \ldots m)$ mal in der Multimenge vertreten sind, also $n = |M| = \sum_{i=1}^{m} k_i$. Wären die n Elemente der Multimenge alle verschieden, so gäbe es $n!$ Permutationen. Die Permutationen der mehrfach vorkommenden Elemente sind aber nicht unterscheidbar. Bei der Multimenge $\{a, a, b\}$ und der Permutation (a, a, b) ist nicht unterscheidbar welches der beiden Elemente a an erster Stelle steht. Kommt ein Element in der Multimenge k_i mal vor, so kann es $k_i!$ solche nicht unterscheidbare Permutationen bilden, die bei der Zählung berücksichtigt werden müssen. Die bei der Permutationen zuviel multiplizierten Teilpermutationen müssen also durch Duvision wieder eliminiert werden.

$$P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!, k_2!, \ldots, k_m!} \text{ mit } \sum_{i=1}^{m} k_i = n, n \geq 1$$

Variationen ohne Wiederholungen Sind die geordneten k-Tupel von k disjunkten Elementen aus einer n Elementigen Menge. Aus einer Menge mit n Elementen werden also der Reihe nach k mal jeweils ein Element entfernt und zu einem geordneten Tupel mit angefügt. Für den ersten Schritt stehen n Elemente zu Verfügung, für den zweiten $n-1$ Elemente, usw., der Vorgang wird k mal durchgeführt, ergibt also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} n-i$ Möglichkeiten. Mit Hilfe der Fakultät kann dies umgeformt werden auf $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variationen mit Wiederholungen Sind geordnete k-Tupel von k nicht notwendigerweise verschiedenen Elementen aus einer Menge mit n Elementen. Bei der Bildung des k-Tupel steht also an jeder Stelle n Elemente zu Verfügung, dass ergibt $\underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{kmal} = n^k$ Möglichkeiten.

$$^{w}V_n^k = n^k$$

Kombinationen ohne Wiederholungen Aus einer Menge mit n Elementen wird eine Teilmenge K mit k Elementen gebildet. Die Reihenfolge der Bildung der Menge K ist ohne Bedeutung, ebenso die Anordnung der Elemente innerhalb der Menge K. Zur Bildung stehen wie bei V_n^k zuerste n, dann $n-1$ usw. bis $n-k+1$ für das k-te Element zur Verfügung. Im Gegensatz zu V_n^k ist aber nun die Reihenfolge belanglos. Aus der gebildeten Menge K kann man $k!$ Permutationen bilden, zwischen denen bei den Kombinationen nicht unterschieden wird. So ergibt sich für die Anzahl der Kombinationen $\frac{V_n^k}{P_n} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

Kombinationen mit Wiederholungen Aus einer Menge M mit n Elementen wird eine Multimenge K mit k nicht notwendigerweise verschiedenen Elementen gebildet. Zur Bestimmung der Anzahl der möglichen Multimengen mit k Elementen aus M wird in [Ste01] ein Modell zur Beschreibung der Multimengen wie folgt eingeführt. Sei * ein Element aus M. Dann können die k Elemente der Multimenge K als k mal dem Symbol * angeschrieben werden, gleiche Elemente werden nebeneinander zusammengefasst und durch das Symbol | getrennt, auch nicht vorkommende Elemente aus der Grundmenge M werden berücksichtigt. Sei etwa $M = \{a, b, c, d\}$ und $K = \{a, a, a, b, b, d\}$, so lautet die Modelldarstellung ***|**||* . Mit diesem Modell können alle Multimengen dargestellt werden, das Modell besitzt immer k mal das Symbol *, und $n-1$ mal das Symbol |. Die Symbole * und | sind somit Positionen die besetzt werden müssen, zusammen gibt es $n+k-1$ Positionen auf die die k Symbole * aufgeteilt werden können, also genau $\binom{n+k-1}{k}$ mögliche Multimengen mit k Elementen, die man aus einer Menge mit n Elementen mit Wiederholung bilden kann.

$$^{w}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Ergänzungen aus [BK92] *Permutationen* können rekursiv als $P_1 = 1, P_n = n \cdot P_{n-1}$ definiert werden. Durch vollständige Induktion ergibt sich $P_n = \prod_{i=1}^{n} i = n!$. *Variationen ohne Wiederholungen* können mittels Äquivalenzklassen hergeleitet werden. Über die n Elemente gibt es $n!$ Permutationen von n-Tupel, zwei Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ werden als äquivalent definiert, wenn sie in den ersten k Stellen übereinstimmen, also $a_i = b_i$ für alle $i = 1 \ldots k$. Alle Äquivalenzklassen bestehen so aus $(n-k)!$ Elementen, die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen entspricht dann der Anzahl der Äquivalenzklassen: $\frac{\text{Anzahl der Permutationen}}{\text{Größe einer Äquivalenzklasse}} = \frac{n!}{(n-k)!}$. Bei den *Kombinationen ohne Wiederholungen* werden zwei Tupel als äquvalent definiert, wenn ihre Trägermengen $\{a_1, \ldots, a_k\}$ und $\{b_1, \ldots, b_k\}$ äquivalent sind, dadurch ergibt sich zu den Variationen ohne Wiederholungen die zusätzliche Reduktion um die $k!$ Permutationen der k Elemente der Trägermengen, also $\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

3 Abzählregeln

Schubfachprinzip Verteilt man n Elemente auf m Fächer mit $n > m$, so gibt es mindestens ein Fach das zwei Elemente enthält.

$$f : X \to Y, |X| > |Y| \Longrightarrow \exists y \in Y \text{ mit } |f^{-1}(y)| \geq 2$$

4 Der binomische Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Beweis durch Induktion Für den Induktionsbeweis wird der Satz $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ benötigt, Beweis des Satzes: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)(n-(k+1)!}+\frac{n!}{(k+1)k!(n-(k+1))!} = \frac{n!((k+1)+(n-k))}{(k+1)k!(n-k)(n-(k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)(n-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$ □ Daraus ergibt sich $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

Induktionsvorraussetzung $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Induktionsbehauptung $(x+y)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{(n+1)-k} y^k$.

Induktionanfang Für $n = 0$: $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$.

Induktionsschritt $n \to n+1$: $(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$. IV einsetzen: $(x+y) \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = x \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-(k-1)} y^{(k-1)+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k$.
Der xy Teil hat nur gleich Struktur, um in der linken Summe von $k = 0$ auf $k = 1$ zu kommen wird dort das erste Glied ($\binom{n}{0} x^{n-0+1} y^0 = x^{n+1}$)herausgehoben, um in der rechten Summe von $n+1$ auf n zu kommen wird dort das letzte Glied ($\binom{n}{(n+1)-1} x^{n-(n+1)+1} y^{n+1} = y^{n+1}$) herausgehoben: $x^{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k + y^{n+1}$. Nun können mit Hilfe von $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ die beiden Summen zusammengefasst werden: $x^{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k + y^{n+1}$. Die beiden herausgenommen Glieder sind die Werte

für $k = 0$ und $k = n + 1$, werden diese wieder in die Summen genommen entspricht dies dem rechten Teil der IB: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{(n+1)-k} y^k \square$.

Literatur

[BK92] Gerd Baron and Peter Kirschhofer. *Einführung in die Mathematik für Informatiker*, volume 1. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2 edition, 1992.

[Hin72] Karl Hinderer. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[Ste01] Angelika Steger. *Diskrete Strukturen 1.* Springer Verlag, Berlin, Heidelber, New York, 2001.